Från igår

- inversmatriser

och

- inversa avbildningar.

nov 26-09:54

T inverterbar

$\Updownarrow$

$\det(A) \neq 0$

där A är matrisen för T.

nov 26-09:55

Matrisen för

T^{-1}

Skrivs

A^{-1}

och vi får A^{-1}

nov 26-09:55

antingen med

Gausselim.

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{G.J.}} \sim (I \mid A^{-1})$$

eller

med Cramers regel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj} A$$

nov 26-09:55

Adj betyder "adjunktmatris"

- Tecken

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & & \\ & \vdots & & & \end{matrix}$$

nov 26-09:55

∘ transponering

$\det(\hat{A}_{ij})$

ska stå på position

ji

i Adj A.

nov 26-09:55

Ex (Uppgift)

Beräkna A^{-1} om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & r \\ 1 & r & 1 \\ r & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Här syns inte transponeringen eftersom $A = A^t$)

nov 26-09:55

Vi fick

$$A^{-1} = \frac{-1}{(1-r)^2(r+2)} \begin{pmatrix} 1-r & 1-r & 1-r^2 \\ 1-r & 1-r^2 & 1-r \\ 1-r^2 & 1-r & 1-r \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1\cancel{(1-r)}}{(1-r)^{\cancel{2}}(r+2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+r \\ 1 & 1+r & 1 \\ 1+r & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nov 26-10:13

Titta på A som

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= B} + (r-1)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= J}$$

$$A = B + (r-1)J$$

nov 26-10:15

$$B^2 = 3B$$

$$BJ = B = JB$$

$$A^{-1} = xB + yJ$$

$$A^{-1}A = I$$

$$\Big(B + (r-1)J\Big)\Big(xB + yJ\Big)$$

nov 26-10:16

$$= xB^2 + yBJ + (r-1)xJB + (r-1)yJ^2$$

$$(J^2 = I) \quad 1, 0$$

$$= 3xB + yB + (r-1)xB + (r-1)yI$$

$$= I$$

nov 26-10:19

$y(r-1)=1$

dvs $y = \frac{1}{r-1}$

$3x + y + (r-1)x = 0$

och vi kan lösa

ut x.

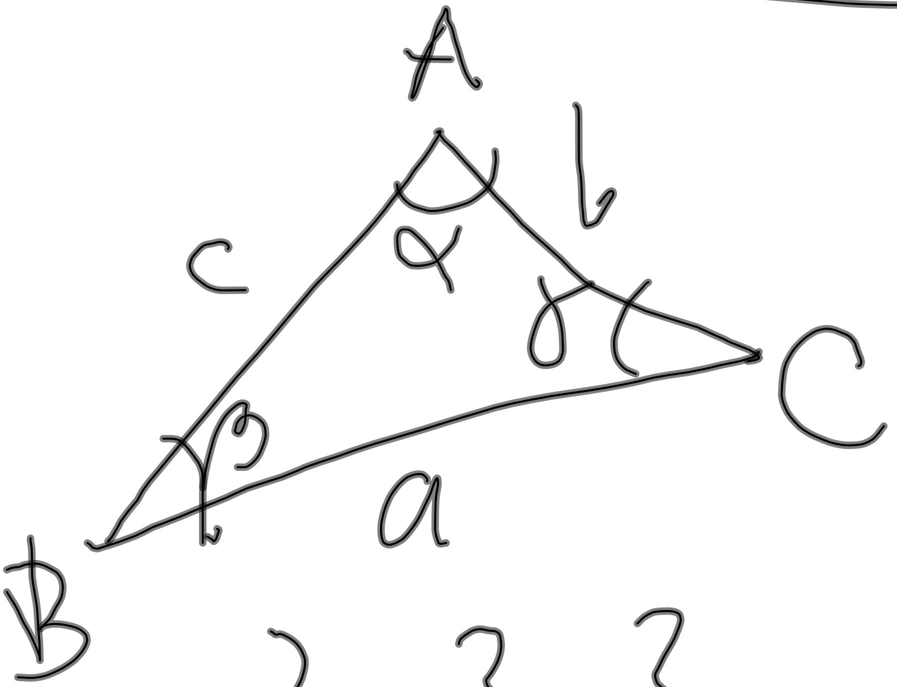
nov 26-10:21

Isometriska avbildningar

Ex. Rotationer och speglingar ändrar varken längd eller vinklar.

nov 26-10:26

Cosinussatsen



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

nov 26-10:27

Kolla att:

$$2\bar{u}\circ\bar{v} = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - |\bar{u}-\bar{v}|^2$$

$$= \bar{u}\circ\bar{u} + \bar{v}\circ\bar{v} - (\bar{u}-\bar{v})\circ(\bar{u}-\bar{v})$$

$$= \cancel{\bar{u}\circ\bar{u}} + \cancel{\bar{v}\circ\bar{v}} - \cancel{\bar{u}\circ\bar{u}} + \bar{u}\circ\bar{v} + \bar{v}\circ\bar{u} - \cancel{\bar{v}\circ\bar{v}}$$

ok!

nov 26-10:29

Alltså bevarar
isometriska
avbildningar
skalärprodukten

nov 26-10:31

Kom ihåg från i förrgår:

ON-baser

(ortonormala baser)

nov 26-10:32

Precis som standardbasen vill vi ha basvektorer som

- parvis ortogon..
- längd 1.

nov 26-10:33

Vi fick

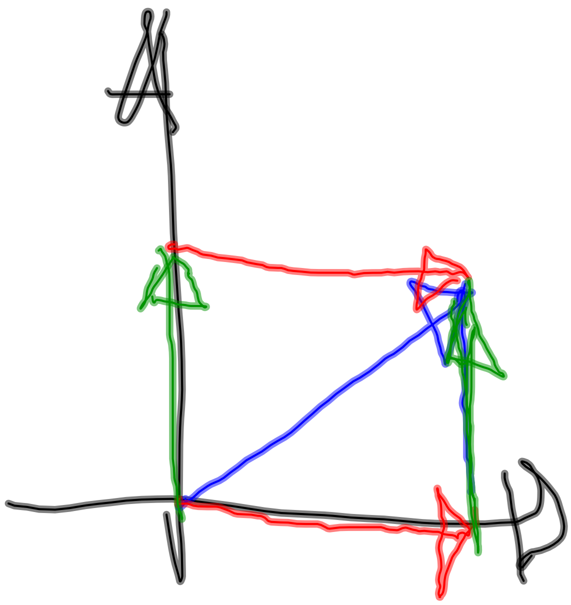
$$\bar{u}_i \circ \bar{u}_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

$$= \delta_{ij}$$

(= elementen i identitetsmatrisen)

nov 26-10:35

Varje vektor är summan av sina projektioner på koordinataxlarna i ett ON-system.



nov 26-10:37

Kolonnerna i
en matris för
en isometrisk
avbildning bildar
en ON-bas.
Och tvärtom.

nov 26-10:39

Exempel

$$\bar{u} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$$

$$T(\bar{u}) = x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2$$

$$T(\bar{u}) \circ T(\bar{u}) =$$

$$(x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2) \circ (x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2)$$

$$= x^2 \bar{u}_1 \circ \bar{u}_1 + xy\, \bar{u}_1 \circ \bar{u}_2 +$$

$$yx\, \bar{u}_2 \circ \bar{u}_1 + y^2\, \bar{u}_2 \circ \bar{u}_2$$

nov 26-10:42

$$= x^2 + y^2 = |(x, y)|^2$$

$$= |\bar{u}|^2$$

Alltså

$$|T(\bar{u})|^2 = |\bar{u}|^2$$

nov 26-10:45

Exempel på icke-isometrisk avbildning

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

definierar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

nov 26-11:05

och

$$T(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

men $|e_1| = 1$

och $|T(e_1)| = \sqrt{17} \neq 1$

$|e_2| = 1$, $|T(e_2)| = \sqrt{13} \neq 1$

nov 26-11:06

Prova att dela med längderna

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

den definierar

$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

nov 26-11:07

om

$$|S(\bar{e}_1)| = 1$$

$$|S(\bar{e}_2)| = 1$$

Testa $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$

$$|\bar{e}_1 + \bar{e}_2| = |(1,1)| = \sqrt{2}$$

nov 26-11:08

$$S(\bar{e}_1 + e_2) =$$

$$S(\bar{e}_1) + S(\bar{e}_2) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Beräkna

$$|S(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)|^2 =$$

nov 26-11:09

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

$$= \ldots\ldots \neq 2$$

nov 26-11:10

Den bevarar inte vinklarna:

$$\bar{e}_1 \circ \bar{e}_2 = 0$$

men

$$S(\bar{e}_1) \circ S(\bar{e}_2) > 0$$

nov 26-11:11

Exempel

Hur hittar vi en ON-bas?

Kom ihåg exemplet med projektion på planet $x+y+z=0$

nov 26-11:13

Vi tog från
vektorer i planet
och normalen till
planet.

Sedan fick vi
byta ut en av

nov 26-11:14

vektorerna i planet för att alla skulle vara ortogonala

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normera}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

nov 26-11:15

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normera}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normera}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nov 26-11:15

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ger isometrisk avb.

nov 26-11:16

Om A är ortogonal är

$$A^t A = I$$

men då är $A^t = A^{-1}$

$$A A^{-1} = I \iff$$

$$A \cdot A^t = I$$

nov 26-11:18

Tolka matris-
multiplikationen
$A^t A$ som
skalärprodukt av
rad i i A^t
med kolonn j i A.

nov 26-11:19

Då får vi

$$A^tA = I$$

$$\Longleftrightarrow$$

kolonnerna bildar ON-bas

nov 26-11:21

$$AA^t = I$$

$$\Longleftrightarrow$$

raderna i A

bildar ON-bas.

nov 26-11:21

Kolla att det stämmer:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{rad}_1 \cdot \text{rad}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1-3+2}{6} = 0$$

nov 26-11:22

I planet

Det finns bara två sorters isometrier

- rotationer
- speglingar

nov 26-11:25

Varför finns inte fler?

Den första basvektorn $\bar{e}_1$ måste skickas på en vektor av längd 1, dvs på $(\cos\theta, \sin\theta)^t$

nov 26-11:27

för något θ.

Den andra måste skickas på en vektor som är ortogonal mot $(\cos\theta, \sin\theta)^T$

Det finns bara två sådana av

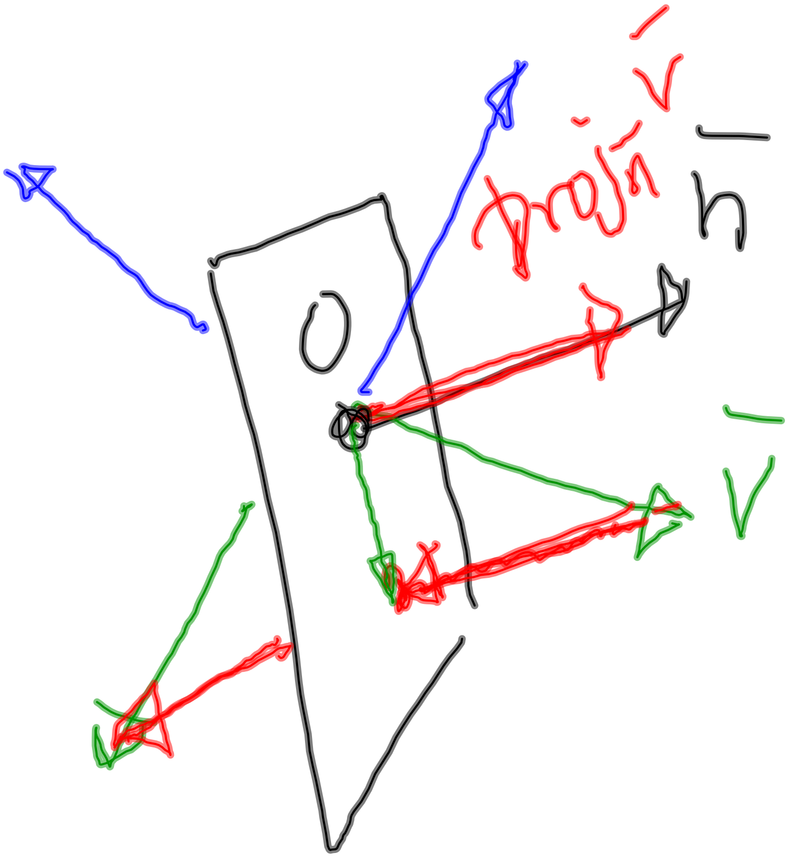
nov 26-11:28

längd 1,

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

nov 26-11:30

Spegling i plan



Speglingen av $\bar{v}$ blir

$$\bar{v} - 2\,\mathrm{Proj}_{\bar{n}}\bar{v}$$

nov 26-11:34

Ex: $x+2y+3z=0$

är ett plan.

Spegla vektorn

$\bar{v}=(1,1,1)^t$

i planet.

Normalen ges av

$\bar{n}=(1,2,3)^t$

nov 26-11:37

$$\mathrm{Proj}_{\bar{n}}\bar{V} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{n}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\bar{n}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{6}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3/7\\6/7\\9/7\end{pmatrix}$$

nov 26-11:38

Om vi tar

$$\bar{v} - \mathrm{Proj}_{\bar{n}} \bar{v}$$

får projektionen av $\bar{v}$ på planet

och speglingen fås som

nov 26-11:40

$$\bar{v} - 2\,\mathrm{Proj}_{\bar{n}}\,\bar{v}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3/7 \\ 6/7 \\ 9/7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/7 \\ -5/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$$

nov 26-11:40

Vi skulle också kunna göra samma med $\bar{r} = (x, y, z)$

$$\mathrm{Proj}_{\bar{n}} \bar{r} = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{x + 2y + 3z}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

nov 26-11:41

Alltså blir speglingen av

$$\bar{r} = (x, y, z)^t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\,\frac{x+2y+3z}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

nov 26-11:42

$$\begin{pmatrix} x - \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z \\ y - \frac{2}{7}x - \frac{4}{7}y - \frac{6}{7}z \\ z - \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{9}{7}z \end{pmatrix}$$

Alltså blir matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 3/7 & -6/7 \\ -3/7 & -6/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

nov 26-11:43